概均質ベクトル空間の保型形式係数ゼータ関数(保型形式と関連するゼータ関数の研究)

佐藤, 文広

数理解析研究所講究録
第 805 巻 1992 年 119-131

概均質ベクトル空間の保型形式係数ゼータ関数

立教大・理学部　佐藤 文広 (Fumihiro Sato)

概均質ベクトル空間のゼータ関数の理論は, 多くの古典的に知られたゼータ関数を統一的に取り扱うことを可能にしたが, Hecke の量指標付きの L 関数を始めとする多くの保型形式と関連するゼータ関数が概均質ベクトル空間の理論に取り込まれずに残されている. 我々の目的は, これらの保型形式付きゼータ関数の一般的取扱いを可能にするように, 理論を拡張することである. しかし, このノートでは, 紙数の関係もあるので, 基本的な考え方を述べて, それを 2 つの具体例 (調和多項式付き Epstein ゼータ関数, Hejhal による保型形式付き ternary non-zero form のゼータ関数) について説明することに止める.

§1　関数等式の証明の枠組み

まず, 概均質ベクトル空間のゼータ関数の理論において, 関数等式がどのような仕組みで導かれるのかを復習する (詳しくは, [SS], [S1] 参照).

(G,ρ,V) を $\mathbb{Q}$ 上定義された概均質ベクトル空間, S をその singular set とする. 以下では, 簡単のため G は reductive, S は絶対既約超曲面と仮定し, S の定義多項式を $P(x)$ としよう. $P(x)$ は, $\mathbb{Q}$-係数の絶対既約多項式としてよい. $P(x)$ は, G-相対不変であることが知られている. すなわち

$$P(\rho(g)x)=\chi(g)P(x)\quad(x\in V,g\in G)$$

を満たす G の $\mathbb{Q}$-有理指標 χ が存在する. $V_{\mathbb{R}}-S_{\mathbb{R}}$ の連結成分への分解を

$$V_{\mathbb{R}}-S_{\mathbb{R}}=V_1\cup\cdots\cup V_\nu$$

とする.

(G,ρ,V) のゼータ関数 $\xi_i(s)$ $(1\leq i\leq\nu)$, 局所ゼータ関数 $\Phi_i(f;s)$ $(f\in\mathcal{S}(V_{\mathbb{R}}),\ 1\leq i\leq\nu)$, ゼータ積分 $Z(f;s)$ をそれぞれ

$$\xi_i(s)=\sum_{x\in\Gamma\backslash(V_{\mathbb{Z}}\cap V_i)}\frac{\mu(x)}{|P(x)|^s},$$

$$\Phi_i(f;s)=\int_{V_i}|P(x)|^s f(x)\,dx,$$

$$Z(f;s)=\int_{G_{\mathbb{R}}^+/\Gamma}\chi(g)^s\sum_{x\in V_{\mathbb{Z}}-S}f(\rho(g)x)\,dg$$

によって定義する. ここで, $G_{\mathbb{R}}^+$ は実リー群 $G_{\mathbb{R}}$ の単位元連結成分, $\Gamma=G_{\mathbb{R}}^+\cap G_{\mathbb{Z}}$, dg は $G_{\mathbb{R}}^+$ の Haar 測度である. また, $G_x^+=\{g\in G_{\mathbb{R}}^+;\rho(g)x=x\}$, $\Gamma_x=G_x^+\cap\Gamma$ とおいたとき, $\mu(x)$ は G_x^+/Γ_x の適当に正規化された Haar 測度に関する体積である.

我々は, 以下, $\xi_i(s)$, $Z(f;s)$ は $\mathrm{Re}(s)$ が十分大きいとき絶対収束すると仮定する. もちろん, この仮定は $\mu(x)<+\infty$ を含む.

次に V^* を V の双対空間, $\rho^*:G\longrightarrow GL(V^*)$ を ρ の反傾表現とすると, (G,ρ^*,V^*) も $\mathbb{Q}$ 上定義された概均質ベクトル空間となり, 上とまったく同様にして, ゼータ関数, 局所ゼータ関数, ゼータ積分が定義できる. 以下, 各記号に付けられた上付き * によって, それが (G,ρ^*,V^*) に対して定義されたものであることを示すことにする.

概均質ベクトル空間のゼータ関数の理論の主結果は, $\xi_i(s)$ が全複素平面に解析接続され $s\longmapsto\frac{n}{d}-s$ $(n=\dim V, d=\deg P)$ について関数等式を満足することである. その証明は, 次の 4 つの事実に基づいている.

(1) ゼータ関数の積分表示：絶対収束域において次が成り立つ.

$$Z(f;s)=\sum_{i=1}^{\nu}\xi_i(s)\Phi_i(f;s-\tfrac{n}{d})\quad(f\in\mathcal{S}(V_{\mathbb{R}})),$$

$$Z^*(f^*;s) = \sum_{i=1}^{\nu} \xi_i^*(s)\Phi_i^*(f^*; s - \tfrac{n}{d}) \quad (f^* \in \mathcal{S}(V_{\mathbb{R}}^*));$$

(2) ゼータ積分の関数等式：ゼータ積分は全複素平面に有理型に解析接続され次を満たす.

$$Z(f;s) = Z^*(\hat{f}; \tfrac{n}{d} - s),$$

ここで $\hat{f}$ は f の Fourier 変換である.

(3) 局所関数等式：局所ゼータ関数は全複素平面に有理型に解析接続され次を満たす.

$$\Phi_i(f;s) = \sum_{i=1}^{\nu} \gamma_{ij}(s)\Phi_j^*(\hat{f}; -\tfrac{n}{d} - s),$$

ここで $\gamma_{ij}(s)$ は, 試験関数 f と無関係な有理型関数で, ガンマ関数・指数関数によって表わされる;

(4) b-関数：次の等式を満たす s の多項式 $b(s)$ が存在する.

$$P^*(\mathrm{grad}_x)P(x)^s = b(s)P(x)^{s-1}.$$

この (1)–(3) を組み合わせれば, ゼータ関数について, 次の結果が直ちに得られる.

(5) ゼータ関数の関数等式：$\xi_i(s), \xi_i^*(s)$ は全複素平面に有理型に解析接続され, 次の関数等式を満たす.

$$\xi_i^*(\tfrac{n}{d} - s) = \textstyle\sum_{j=1}^{\nu} \gamma_{ji}(s - \tfrac{n}{d})\xi_j(s) \quad (1 \le i \le \nu).$$

(4) の b-関数は, ゼータ関数・局所ゼータ関数の極の位置, $\gamma_{ij}(s)$ に含まれるガンマ因子の形を統制する. また, (2) のゼータ積分の関数等式の証明は, Poisson 和公式を用いてなされるが, その際 singular set S に含まれる格子点の寄与 (ゼータ関数の極に反映する) の処理が一般には困難である. b-関数は, この困難を打ち消して (その結果, ゼータ関数の特異部に関する情報は失われるものの), 関数等式を一般に証明するために利用される.

さて，ゼータ関数の理論を保型形式付きへと拡張するためには，いま説明した 4 つの事実を拡張してやればよい．まず，(1) の積分表示については，すでに [S3] で概略を述べた．そこでは，ゼータ関数が有効に定義され積分表示が得られる場合として，(A) Compact case, (B) Symmetric case の 2 つを挙げた．そのポイントは，ある種の球関数の空間の次元の有限性であった．

以下の 2 節では，Compact case の例として調和多項式つき Epstein ゼータ関数，Symmetric case の例として Hejhal による保型形式付き ternary non-zero form のゼータ関数を取り上げ，(2), (3), (4) の部分の拡張について説明することにする．詳細は，Compact case については [S4], Symmetric case については [S5] を参照されたい．

§2　調和多項式付き Epstein ゼータ関数

$G = GL(1) \times SO(n)$, $V = \mathbb{C}^n$ とし，G の V 上の表現$\rho : G \longrightarrow GL(V)$ を $\rho(t,h)x = t \cdot hx$ $(x \in V, t \in GL(1), h \in SO(n))$ と定める．V 上の $SO(n)$-不変な内積を $(x,y) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$ とし，$P(x) = (x,x) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2$ とおく．このとき (G, ρ, V) は概均質ベクトル空間であり，singular set S は $S = \{x \in V \mid P(x) = 0\}$ で与えられる．

d 次調和多項式の空間を H_d で表わす．すなわち，$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \cdots + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2}$ としたとき，$Q(x) \in H_d$ は d 次斉次多項式であり，$\Delta Q = 0$ を満たす．

$Q \in H_d$ に対し，Q-係数の Epstein ゼータ関数を

$$\zeta(Q, L; s) = \sum_{x \in L - \{0\}} \frac{Q(x)}{(x,x)^{s+\frac{d}{2}}}$$

で定義する．ここで L は，$V_{\mathbb{R}} = \mathbb{R}^n$ の格子である．Dirichlet 級数$\zeta(Q, L; s)$ は $\mathrm{Re}(s) > \frac{n}{2}$ で絶対収束する．また，このゼータ関数に対応する局所ゼータ関数は

$$\Phi(Q, f; s) = \int_{V_{\mathbb{R}} - \{0\}} (x,x)^{s - \frac{n+d}{2}} Q(x) f(x)\, dx \quad (f \in \mathcal{S}(V_{\mathbb{R}}))$$

である．

定理 (Epstein (1903), (1907)).

(i) $\zeta(Q, L; s)$ は, s の有理型関数として全複素平面に解析接続される. もし $d \geq 1$, すなわち, Q が定数でないならは, $\zeta(Q, L; s)$ は整関数である.

(ii) $\zeta(Q, L; s)$ は, 次の関数等式を満たす:

$$\xi(Q, L; s) = v(L)^{1/2}\pi^{-s}\Gamma(s + \tfrac{d}{2})\zeta(Q, L; s)$$

とおくと

$$e^{d\pi i/2}\xi(Q, L^*; \tfrac{n}{2} - s) = \xi(Q, L; s).$$

ここで, $v(L)$ は L の基本領域の体積, L^* は L の双対格子である.

$K = SO(n)_{\mathbb{R}}$ とおく. $G^+_{\mathbb{R}} = \mathbb{R}^\times_+ \times K$ である. $SO(n-1)_{\mathbb{R}}$ を $x_0 = {}^t(1, 0, \ldots, 0)$ における K の isotropy 部分群と同一視する. (π, W) を K の $SO(n-1)$ に関して class 1 の既約ユニタリ表現とする. このような表現は, ある $d \geq 0$ に対し H_d 上に実現される K の自然な表現と同値である.

表現 (π, W) に対し, End(W)-値のゼータ積分 $Z_\pi(f, L; s)$ を

$$Z_\pi(f, L; s) = \int_0^\infty t^{2s}\frac{dt}{t}\int_K \pi(k) \sum_{x \in L - \{0\}} f(tkx)\, dk$$

によって定義する. ここで dk は, vol$(K) = 1$ と正規化された K の不変測度である. この積分は $\mathrm{Re}(s) > \frac{n}{2}$ で絶対収束する.

$x \in V_{\mathbb{R}}$, $x \neq 0$ に対し, $t_x > 0$, $k_x \in SO(n)_{\mathbb{R}}$ を $x = t_x k_x x_0$ を満たすように定める. t_x は一意的に, k_x は $SO(n-1)$ を modulo として定まる. w_0 を $\pi(SO(n-1)_{\mathbb{R}})$-不変, かつ $\|w_0\| = 1$ となる W のベクトルとする. このようなベクトルは, 絶対値 1 の複素数倍を除いて一意的である. $d \geq 0$ を π が H_d 上に実現されるような d として, $w \in W$ に対し

$$Q_w(x) = (\dim W)^{1/2}(x, x)^{d/2}\langle \rho(k_x)^{-1}w, w_0\rangle$$

とおくと, $Q_w(x) \in H_d$ であり, 線型写像 $w \longmapsto Q_w$ は W と H_d との同型を与える.

命題 (ゼータ関数の積分表示). $w, w' \in W$ に対し, $\mathrm{Re}(s) > \frac{n}{2}$ において, 次が成り立つ:

$$\langle Z_\pi(f, L; s)w, w'\rangle = \frac{\Gamma(n/2)}{2\pi^{n/2}\dim W} \cdot \zeta(Q_w, L; s)\Phi(\overline{Q_{w'}}, f; s).$$

命題 (ゼータ積分の関数等式).

$$Z_\pi(f, L; s) - \delta_{d0}\left\{ v(L^*)^{1/2}\frac{\hat{f}(0)}{2s-n} - v(L)^{1/2}\frac{f(0)}{2s} \right\}$$

は s の整関数に解析接続され, 関数等式

$$v(L)^{1/2}Z_\pi(f, L; s) = v(L^*)^{1/2}Z_\pi(\hat{f}, L^*; s)$$

を満たす.

局所関数等式は, 次のようになる.

定理. $Q \in H_d$, $f \in \mathcal{S}(V_{\mathbb{R}})$ に対し, 関数等式

$$\Phi(Q, \hat{f}; s) = e^{d\pi i/2}\pi^{-2s+\frac{n}{2}}\frac{\Gamma(s+\frac{d}{2})}{\Gamma(\frac{d+n}{2}-s)}\Phi(Q, f; \tfrac{n}{2}-s).$$

を満たす.

この局所関数等式は, [RS], §5 において, (おそらく) 始めて得られた.

最後に b-関数の拡張であるが, それは, 次の公式である.

定理. $Q \in H_d$ に対し,

$$Q(\mathrm{grad}_x)(x,x)^s = 2^d\prod_{i=0}^{d-1}(s-i)\ Q(x)(x,x)^{s-d}$$

が成り立つ.

以上の結果をまとめて, 本節の冒頭の Epstein ゼータ関数に関する定理を証明することは容易である. 本節の結果の証明, 及び Epstein ゼータ関数に対する Hamburger 型定理への応用については [S2] に譲る.

§3 保型形式付き ternary non-zero form のゼータ関数

この節では, Hejhal ([H]) の結果を, 第 1 節で説明した概均質ベクトル空間の理論の立場から再構成する.

3.1 概均質ベクトル空間

考える概均質ベクトル空間は, 次のものである. $G = GL(2)$, $V = Sym(2) = \{x \in M(2) \mid {}^t x = x\}$ とし, 表現 ρ は $\rho(g)x = gx\,{}^t g$ で与えられるものとする. このとき (G, ρ, V) は概均質ベクトル空間で, 相対不変式 $P(x) = \det x$ によって $S = \{x \in V \mid P(x) = 0\}$ となる.

さて, Hejhal に従って, 次のような $\mathbb{Q}$-構造を考える. p, q を square free で, しかも二次形式 $x_1^2 - px_2^2 - qx_3^2$ が $\mathbb{Q}$ 上で 0 を表わさないようなものとする. V の $\mathbb{Q}$-構造を

$$V_{\mathbb{Q}} = \left\{ x = \begin{pmatrix} x_1 + \sqrt{q}\,x_3 & \sqrt{p}\,x_2 \\ \sqrt{p}\,x_2 & x_1 - \sqrt{q}\,x_3 \end{pmatrix} \in V \;\middle|\; x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{Q} \right\}$$

によって定義する. このとき, $P(x) = \det x = x_1^2 - px_2^2 - qx_3^2$ である.

開軌道 $V_{\mathbb{R}} - S_{\mathbb{R}}$ を

$$V_{\mathbb{R}} - S_{\mathbb{R}} = V_+ \cup V_-, \; V_+ = \{x \in V_{\mathbb{R}} \mid P(x) > 0\}, \; V_- = \{x \in V_{\mathbb{R}} \mid P(x) < 0\}$$

と分解しておく.

3.2 保型形式

$\mathfrak{H}$ を上半平面, $\Gamma \subset SL(2)_{\mathbb{R}}$ を $V_{\mathbb{R}}$ の格子

$$L = V_{\mathbb{Z}} = \left\{ x = \begin{pmatrix} x_1 + \sqrt{q}\,x_3 & \sqrt{p}\,x_2 \\ \sqrt{p}\,x_2 & x_1 - \sqrt{q}\,x_3 \end{pmatrix} \in V \;\middle|\; x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{Z} \right\}$$

を不変にする第 1 種 Fuchs 群とし, 保型形式としては, 次のようなものを考える:

$$\phi : \mathfrak{H} \longrightarrow \mathbb{C} \quad :C^2 \text{ 級関数}$$

$$\text{s. t.} \quad \text{(i)}\ \phi(\gamma \cdot z) = \left(\frac{cz+d}{|cz+d|}\right)^m \phi(z) \quad \left({}^\forall \gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma\right)$$

$$\text{(ii)}\ \Delta_m \phi(z) = \lambda(\lambda - 1)\phi(z),$$

ここで m は $m \equiv 0 \pmod 4$ なる非負整数, Δ_m は次で与えられる微分作用素である.

$$\Delta_m = y^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) - m\sqrt{-1}\,y\frac{\partial}{\partial x}.$$

3.3 ゼータ関数

ϕ を上のような保型形式として, ϕ に付随するゼータ関数を次のように定義する.

$$\zeta_+(\phi; s) = |m/2|! \cdot \frac{\Gamma(\lambda)}{\Gamma(\frac{m}{2} + \lambda)} \cdot \sum_{x \in \Gamma \backslash (L \cap V_+)} \frac{E_\phi(x)}{|\Gamma_x|} \cdot |P(x)|^{-s},$$

$$\zeta_-(\phi; s) = \frac{(-4)^{-m/4}}{2\sqrt{\pi}} \cdot \frac{\Gamma\left(1 - \frac{\lambda + \frac{m}{2}}{2}\right)\Gamma\left(1 + \frac{m}{2} - \lambda\right)}{\Gamma(1-\lambda)\Gamma\left(\frac{\frac{m}{2} - \lambda + 1}{2}\right)} \times \sum_{x \in \Gamma \backslash (L \cap V_-)} I_\phi(x) \cdot |P(x)|^{-s}.$$

上式に現われる記号の説明をする. まず

$$\Gamma_x = \{\gamma \in \Gamma \mid \rho(\gamma)x = x\}$$

である. $x \in L \cap V_+$ ならば, $|\Gamma_x| < +\infty$ である. $x \in L \cap V_-$ ならば, $\Gamma_x \cong \{\pm 1\} \times \mathbb{Z}$ であり, とくに $|\Gamma_x| = +\infty$.

$E_\phi(x)$ の定義をするために, $x \in L \cap V_+$ に対し, $x = t \cdot (g\,{}^t g)$ となる $t \in \mathbb{R}^\times$ と $g \in SL(2)_\mathbb{R}$ をとる. $z_x = g \cdot \sqrt{-1} \in \mathfrak{H}$, $w = \dfrac{z - z_x}{z - \overline{z_x}}$ とおくと, w は単位円板上を動く. $\phi(z)$ を $w = re^{i\theta}$ の関数とみなし θ について Fourier 展開すると, 次の形になる:

$$\begin{aligned}\phi(z) &= \left(\frac{1-w}{1-\bar{w}}\right)^{m/2} \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n(x) r^{|n|} (1-r^2)^\lambda \\ &\quad \times F(\lambda + |n| + \tfrac{m}{2}\mathrm{sgn}(n+\tfrac{1}{2}), \lambda - \tfrac{m}{2}\mathrm{sgn}(n+\tfrac{1}{2}), 1+|n|; r^2)\, e^{in\theta}.\end{aligned}$$

ここで $F(a,b,c;z)$ は Gauß の超幾何級数である. このとき

$$E_\phi(x) = c_{-m/2}(x)$$

と定義する.

最後に $I_\phi(x)$ の定義である. $x_0 = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{q} \\ \sqrt{q} & 0 \end{pmatrix} \in L \cap V_-$ とおき, $x \in L \cap V_-$ に対し $x = t \cdot (g x_0\, {}^t g)$ となる $t > 0$ と $g \in SL(2)_\mathbb{R}$ をとる. この $g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ を用いて

$$\psi(z) = \left(\frac{|cz+d|}{cz+d}\right)^m \cdot \phi(g \cdot z)$$

とおく. 巡回群 $\Gamma_x/\{\pm 1\}$ の生成元 $\gamma(x)$ をとり, $\gamma(x)$ の固有値の絶対値のうち 1 より大きいものを $\varepsilon(x)$ と表わす. このとき

$$I_\phi(x) = \int_1^{\varepsilon(x)^2} \psi(r \cdot \sqrt{-1}) \frac{dr}{r}$$

と定義する.

以上で定義されたゼータ関数 $\zeta_\pm(\phi; s)$ は, $\mathrm{Re}(s) > \frac{3}{2}$ で絶対収束する.

定理 (Hejhal [H]). (i) $\zeta_\pm(\phi; s)$ は $s = \frac{3}{2}$ に高々 1 位の極を持つ他, いたる

ところ正則な関数に解析接続される．もし $m \neq 0$ ならば，$\zeta_{\pm}(\phi; s)$ は整関数である．

(ii) 関数等式

$$\begin{pmatrix} \zeta_{+}^{*}(\phi; \frac{3}{2} - s) \\ \zeta_{-}^{*}(\phi; \frac{3}{2} - s) \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{pq}} \pi^{\frac{1}{2}-2s} \Gamma(s + \frac{\lambda - 1}{2}) \Gamma(s - \frac{\lambda}{2}) \times \begin{pmatrix} \cos(s\pi) & \sin\left(\frac{\pi\lambda}{2}\right) \\ \cos\left(\frac{\pi\lambda}{2}\right) & \sin(s\pi) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \zeta_{+}(\phi; s) \\ \zeta_{-}(\phi; s) \end{pmatrix}$$

が成り立つ．ここで，左辺のゼータ関数 $\zeta_{\pm}^{*}(\phi, s)$ は，V 上の内積 $(x, y) = \mathrm{tr}\, xy$ に関する L の双対格子によって同様に定義されたゼータ関数である．

注意．上で与えたゼータ関数の定義は，[H] における定義とはλ, m に依存する定数倍だけ異なっているので，関数等式の形も見かけ上異なっている．

3.4 ゼータ関数の積分表示

ゼータ積分を定義するために，まず保型形式 ϕ を群上の関数に持ち上げる．簡単のため，$G^1 = SL(2)_{\mathbb{R}}$, $K = SO(2)$ とおく．G^1 の元 g を

$$g = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y^{-\frac{1}{2}} & 0 \\ 0 & y^{\frac{1}{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -x \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

と岩沢分解し，

$$u(g) = \exp(-m\theta\sqrt{-1})\phi(g^{-1} \cdot \sqrt{-1})$$

とおく．以下，

$$k(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

とおく．このとき $u(g)$ は，次の条件を満たす．

(i) $$u(k(\theta)g) = \exp(-m\theta\sqrt{-1})u(g),$$

(ii) $$\mathcal{C}u = \lambda(\lambda - 1)u.$$

ここで $\mathcal{C}$ は, Casimir 作用素である. この関数 u を用いて, ゼータ積分を

$$Z(f,u;s)=\int_0^{+\infty} t^{2s}\frac{dt}{t}\int_{G^1/\Gamma} u(h)\sum_{x\in L-S} f(t\cdot hx\,{}^th)\,dh \quad (f\in\mathcal{S}(V_{\mathbb{R}}))$$

と定義する. この積分は, $\mathrm{Re}(s)>\frac{3}{2}$ で絶対収束する.

ゼータ積分 $Z(f,u;s)$ をゼータ関数と局所ゼータ関数の積に分解するには, 開軌道上 homogeneous of degree 0 で, 関数 u と同じ K による変換性 (i) をもち, かつ, (ii) に対応し, 不変微分作用素の固有関数になっているもの (球関数) を調べる必要がある. いま取り扱っている例では, 球関数は次のように具体的に与えることが出来る.

上半平面 $\mathfrak{H}$ 上の関数 $\omega_{\lambda,m}(z)$ を

$$\omega_{\lambda,m}(z)=\frac{\Gamma(\lambda+\frac{m}{2})}{\Gamma(\lambda)\left|\frac{m}{2}\right|!}(1-|w|^2)^{\lambda}\,|w|^{m/2}\,F(\lambda,\lambda+\tfrac{m}{2},\tfrac{m}{2}+1;|w|^2)\cdot\left(\frac{w}{|w|}\right)^{m/2}$$

によって定義する. ここで $w=\dfrac{z-i}{z+i}$ である. $V_+\in x$ に対し, $x=t\cdot h\,{}^th$ $(t\in\mathbb{R}^{\times}, h\in G^1)$ と表わし,

$$\omega^+_{\lambda,m}(x)=\omega_{\lambda,m}(h\cdot\sqrt{-1})$$

とおく.

$x\in V_-$ に対しては, 球関数を積分

$$\omega^-_{\lambda,m}(x)=\int_0^{2\pi}\left|(k(\theta)x\,{}^tk(\theta))_{11}\right|^{-\lambda} e^{m\theta\sqrt{-1}}\,d\theta$$

(の解析接続) と定める. ここで $(*)_{11}$ は行列 $*$ の (1,1)-成分を表わす. このとき, 局所ゼータ関数は,

$$\Phi_{\pm}(f;\lambda,m,s)=\int_{V_\pm}|\det x|^{s-\frac{3}{2}}\,\omega^{\pm}_{\lambda,m}(x)f(x)\,dx$$

と定義される.

以上の準備の下で, 次の積分表示が得られる:

命題.

$$Z(f,u;s)=\zeta_+(\phi;s)\Phi_+(f;\lambda,m,s)+\zeta_-(\phi;s)\Phi_-(f;\lambda,m,s).$$

3.5 関数等式

ゼータ積分の関数等式は, 次のようになる.

命題.

$$Z(f,u;s)-v(\phi)\left\{\frac{\hat{f}(0)}{2s-3}-\frac{f(0)}{2s}\right\}$$

は s の整関数に解析接続され,

$$Z(f,u;s)=Z(\hat{f},u;\tfrac{3}{2}-s)$$

を満たす. ここで,

$$v(\phi)=2\pi\,\delta_{m0}\int_{\Gamma\backslash\mathfrak{H}}\phi(z)\,\frac{dx\,dy}{y^2}$$

である.

一方, 局所関数等式は

命題.

$$\begin{pmatrix}\Phi_+(\hat{f};\lambda,m,s)\\ \Phi_-(\hat{f};\lambda,m,s)\end{pmatrix}=\frac{1}{\sqrt{pq}}\pi^{\frac{1}{2}-2s}\,\Gamma\left(s+\frac{\lambda-1}{2}\right)\Gamma\left(s-\frac{\lambda}{2}\right)\times\begin{pmatrix}\cos(s\pi) & \cos\left(\frac{\pi\lambda}{2}\right)\\ \sin\left(\frac{\pi\lambda}{2}\right) & \sin(s\pi)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\Phi_+(f;\lambda,m,\frac{3}{2}-s)\\ \Phi_-(f;\lambda,m,\frac{3}{2}-s)\end{pmatrix}.$$

となる. この球関数付き局所関数等式は, $GL(2)$ の Borel 部分群が $V=$

$Sym(2)$ に作用して得られる概均質ベクトル空間における通常の局所関数等式に帰着する. b-関数についても, 同様である.

以上の諸結果をまとめれば, (global) ゼータ関数の関数等式と解析接続を得る.

参考文献

[H] D.Hejhal, Some Dirichlet series with coefficients related to periods of automorphic eigen forms, *Proc. Japan Acad.* **58**(1982), 413–417.

[RS] S.Rallis and G.Schiffmann: Distributions invariantes par le groupe orthogonal, *Lect. Notes in Math.* **497**(1975), Springer Verlag, pp. 494–642,

[S1] F.Sato: Zeta functions in several variables associated with prehomogeneous vector spaces I, *Tôhoku Math. J.* **34**(1982), 437–483.

[S2] F.Sato: The Hamburger theorem for Epstein zeta functions, *Algebraic Analysis*, vol. II, Academic Press, 1989, pp. 789–807.

[S3] F.Sato: 概均質ベクトル空間に付随する保型形式係数ゼータ関数, 数理解析講究録 **727**(1990), 93–106.

[S4] F.Sato: Zeta functions with polynomial coefficients associated with prehomogeneous vector spaces. Preprint, 1989.

[S5] F.Sato: Zeta functions of prehomogeneous vector spaces with coefficients related to periods of automorphic forms. in preparation.

[SS] M.Sato and T.Shintani: On zeta functions associated with prehomogeneous vector spaces, *Ann. of Math.* **100**(1974), 131–170.